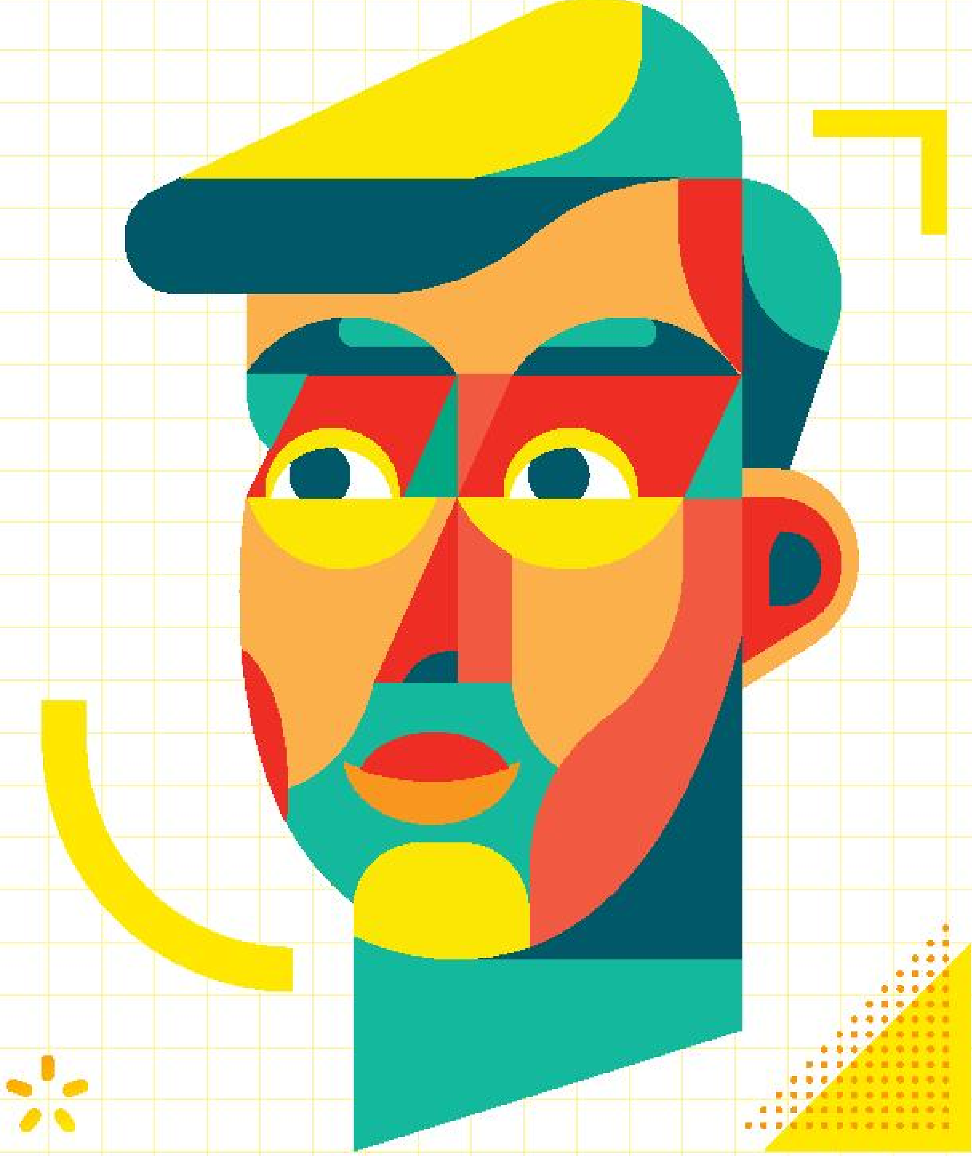


محمود نصیری

# تفکر هندسی و مفهوم‌های هندسی

### عکس قضیه‌ها، اثبات به روش تناقض اثبات خط‌های موازی و عمود بر هم

در زندگی روزمره و بیشتر در ریاضی، با جمله‌هایی سروکار داریم که با «اگر» و «آنگاه» همراه هستند: «اگر امروز زنگ ورزش داشته باشم، آنگاه فوتبال بازی می‌کنیم.» در واقع زنگ ورزش داشتن، شرطی برای فوتبال بازی کردن است. ریاضی پر از چنین جمله‌هایی است: اگر دو عدد ۳ و ۵ را با هم جمع کنیم، آنگاه حاصل آن‌ها برابر ۸ می‌شود. در قسمت‌های قبلی بدون آنکه نامی برده شود، چنین جمله‌هایی را مرتباً به کار برده‌ایم:

● خطی دو خط متمایز را قطع کرده است. اگر این دو خط موازی باشند، آن‌گاه زاویه‌های متبادل داخلی هم‌نهشت هستند.

● خطی دو خط متمایز را قطع کرده است. اگر این دو خط موازی باشند، آن‌گاه زاویه‌های متقابل هم‌نهشت‌اند.

تمام این جمله‌ها از دو قسمت اصلی تشکیل شده‌اند: قسمت اول با **اگر** شروع می‌شود و شرط‌هایی را بیان می‌کند و قسمت دوم با **آنگاه** شروع می‌شود و یک نتیجه‌گیری را بیان می‌کند. در موردهایی که این نتیجه‌گیری را بدون اثبات می‌پذیریم، آن را «اصل» می‌نامیم و در موردهایی که این نتیجه‌گیری را باید ثابت کنیم، آن را قضیه می‌نامیم. این‌گونه جمله‌ها یا گزاره‌ها را جمله‌ها یا **گزاره‌های شرطی** می‌نامند؛ مانند «اصل زاویه‌های متقابل» و «قضیهٔ زاویه‌های متبادل داخلی».

در قضیه‌ها، قسمت اول را که با اگر شروع می‌شود، **فرض** می‌نامیم و قسمت دوم را که باید ثابت کنیم، **حکم** یا **نتیجه** می‌نامیم. در قضیه‌های زاویه‌های متبادل داخلی یا زاویه‌های متناظر، جملهٔ «اگر دو خط موازی باشند» فرض و جملهٔ آنگاه «دو زاویه متبادل داخلی هم‌نهشت‌اند» یا «دو زاویهٔ متناظر هم‌نهشت‌اند» حکم یا نتیجه نام دارد.

البته در موردهایی ممکن است جمله‌های اضافی نیز مطرح کنیم که در واقع مکمل اطلاعات این جمله‌ها هستند.

مثلاً در شـــماره‌های آینده نشان خواهیم داد: «در هر مثلث، اگر سه ارتفاع را رسم کنید، آنگاه خط‌های شامل آن‌ها در یک نقطه متقاطع‌اند.» در اینجا، عبارت «در هر مثلـــث» این اطلاع را به ما می‌دهد که ما کلاً یک ویژگی شکلی به نام مثلث را داریم بیان می‌کنیم. همچنین، «اگر سه ارتفاع را رسم کنید»، فرض و آن‌گاه «خط‌های شامل آن‌ها در یک نقطه متقاطع هستند»، حکم یا نتیجه نامیده می‌شود.

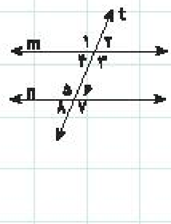
تمام این نوع گزاره‌ها که شـــامل «اگر» و «آنگاه» هستند، گزاره‌های شرطی نامیده می‌شوند. حال اگر جای این فرض و حکم را عـــوض کنیم، اگر را برای حکم و آن‌گاه را بـــرای فرض به کار ببریم، گزارهٔ حاصل را عکس گزاره یـــا قضیهٔ قبلی می‌نامیم مثلاً: «اگر حاصل جمـــع دو عدد برابر ۸ باشد، آنگاه آن دو عدد ۳ و ۵ هستند.» یا: «خطی دو خط متمایز را قطع کرده است. اگـــر دو زاویهٔ متبادل داخلی هم‌نهشـــت باشند، آنگاه این دو خط موازی‌اند.»

این عکس قضیهٔ زاویه‌های متبادل داخلی اســـت. وقتی عکس یک گزاره یا قضیه را می‌نویســـیم، با گزاره‌ای روبه‌رو می‌شویم که ممکن اســـت درست باشـــد یا درست نباشـــد. گزارهٔ «اگـــر حاصل جمع دو عدد برابر ۸ باشـــد، آن‌گاه آن دو عدد فقط ۳ و ۵ هستند»، نادرست است. زیرا ممکن است آن دو عـــدد ۱ و ۷ یا هـــر دو عدد دیگری باشند که جمع آن‌ها ۸ شود. اما قضیه‌های زیادی داریم که عکس آن‌ها نیز درســـت هســـتند. عکس قضیهٔ زاویه‌های متبادل داخلی بسیار مهم است، زیرا کاربرد زیادی در اثبات قضیه‌های دیگر دارد. حتی عکس اصل زاویه‌های متقابل را می‌توانیم بیان و ثابت کنیم. یعنـــی می‌توانیم عکس اصل زاویه‌های متقابـــل را به‌صورت یک قضیه بیان و ثابت کنیم. ابتدا این عکس‌ها را بیان و سپس اثبات‌های آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

**۱. عکس قضیـــهٔ زاویـــه‌های متبـــادل داخلی:** خطی دو خط متمایز را قطع کرده است. اگر دو زاویهٔ متبادل داخلی هم‌نهشت باشنـــد، آن‌گاه دو خط موازی‌انـــد. یعنی در شکل ۱، اگر: $\angle ۶ \cong \angle ۴$، آن‌گاه: $m \parallel n$.

**۲. عکس اصل زاویه‌های متقابل:** خطی دو خط متمایز را قطع کرده است. اگر دو زاویهٔ متقابل مکمل باشند، آن‌گاه این دو خط موازی‌اند. یعنی در شکل ۱، اگر $m\angle ۳ + m\angle ۶ = ۱۸۰^\circ$، آن‌گاه: $m \parallel n$.

شکل ۱




**۳. عکس قضیهٔ زاویه‌های متناظر:** خطی دو خط متمایز را قطع کرده اســـت. اگر دو زاویهٔ متناظر هم‌نهشت باشند، آنگاه دو خط موازی‌اند. یعنی در شکل ۱، اگر: $\angle ۶ \cong \angle ۲$، آن‌گاه: $m \parallel n$.

**۴. عکس قضیـــهٔ زاویه‌های متبادل خارجی:** خطی دو خط متمایز را قطع کرده است. اگر دو زاویهٔ متبادل خارجی هم‌نهشت باشـــند، آن‌گاه دو خط موازی‌اند. یعنی در شکل ۱، اگر: $\angle ۷ \cong \angle ۱$، آنگاه: $m \parallel n$.

در تمام این قضیه‌هـــا در مورد زاویه‌های هم‌نهشت فقط دو مورد را بیان کرده‌ایم. واضح است که اگر هر دو مورد نظیر دیگر را نیز بنویسیم، اثبات تفاوتی ندارد. مثلاً می‌توانیـــم در قضیه به جای $\angle ۶ \cong \angle ۴$ بنویسیم: $\angle ۵ \cong \angle ۳$ و تفاوتی ندارد. بقیه نیز به همین ترتیب هستند.

## و اما اثبات‌ها!

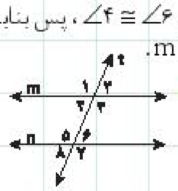
در ریاضی گاهی مســـئله‌ها یا قضیه‌هایی وجود دارند کـــه اثبات آن‌ها چالش اصلی است. یعنی گروهی از قضیه‌ها یا مسئله‌های دیگری هستند که اگر این قضیهٔ چالش‌دار ثابت شـــود، اثبات آن‌ها به‌ســـادگی انجام می‌شـــود. در واقع این قضیهٔ اصلی‌تر کلید اثبات‌های دیگر می‌شود. در سال‌های بعد با چنین قضیه‌هایی آشنا خواهید شد. مثلاً یکی از معروف‌ترین این قضیه‌ها در هندسه، «قضیهٔ فیثاغورس» است. تعداد قضیه‌ها یا مسئله‌هایی که به کمک قضیه فیثاغورس ثابت می‌شوند، از شمار خارج است.

همچنین، در چهار قضیهٔ قبل هر کدام که ثابت شود، ســـه تای دیگر به‌سادگی ثابت خواهند شـــد. مثلاً فرض کنیم قضیهٔ ۱، یعنی عکس قضیهٔ زاویه‌های متبادل داخلی را ثابت کرده‌ایم. به‌سادگی سه قضیهٔ دیگر را به آن تبدیل می‌کنیم و در نتیجه ثابت می‌شوند. در ادامه آن‌ها را مشاهده می‌کنید.

**اثبـــات ۲.** $m\angle ۳ + m\angle ۶ = ۱۸۰^\circ$ و $m\angle ۳ + m\angle ۴ = ۱۸۰^\circ$ چرا؟ در نتیجه: $m\angle ۶ = m\angle ۴$. اکنون بنا بر قضیهٔ ۱ داریم: $m \parallel n$.

**اثبات ۳.** $\angle ۶ \cong \angle ۲$، اما $\angle ۴ \cong \angle ۲$ چرا؟ در نتیجه: $\angle ۶ \cong \angle ۴$، پس بنابر قضیهٔ ۱ داریم: $m \parallel n$.

شکل ۲




**اثبـــات ۴.** $\angle ۷ \cong \angle ۱$ اما $\angle ۳ \cong \angle ۱$ و $\angle ۵ \cong \angle ۷$ در نتیجه $\angle ۵ \cong \angle ۳$، پس بنا بر قضیهٔ (۱) $m \parallel n$.

مشـــاهده می‌کنیم که اگر هـــر کدام از قضیه‌های بالا قبلاً ثابت شده باشند، اثبات سه تای دیگر کاری ساده است. اما آن یکی را چگونه ثابت کنیم؟

در بعضی از کتاب‌های درسی در پایه‌های پایین‌تر، یکی از این چهار قضیه را به عنوان اصل می‌پذیرند و بقیه را ثابت می‌کنند.

اما ما نمی‌خواهیم این کار را انجام دهیم و بنا داریم یکی از این چهار قضیه، مثلاً قضیهٔ ۱ را ثابت کنیم. برای این کار هم دو دلیل داریم: اول اینکه وقتـــی می‌توانیم چنین اثباتی را در این مقطع بیان کنیم، پس بهتر اســـت که این کار انجام شود. اما دلیل دوم مهم‌تر است، زیرا با یک روش اثبات جدید آشنا می‌شویم. این روش را در عنوان مقاله هم بیان کرده‌ایم: بله «روش تناقض» که به آن روش «برهان خلف» نیز گفته می‌شود. روش توانمندی که نه‌تنها در ریاضی، بلکه حتی در استدلال‌های روزمرهٔ ما نیز می‌تواند مطرح باشد. پس به آن خوب توجه کنید.

در قسمت‌های قبلی توضیح دادیم:

**گزاره جمله‌ای است که یا درست است یا نادرست و نمی‌تواند هر دو باشد.**

بنابراین اگر جمله‌ای داشـــته باشیم که در یک دستگاه معین، هم درست باشد و هم نادرست، گوییم این یک تناقض است. مثلاً در ســـاعت ۹ صبح شما نمی‌توانید هم در خانه باشـــید و هم در مدرســـه. اگر کسی چنین ادعایی بکنـــد، می‌گوییم این یک تناقض است. از تناقض گاهی در رد یا اثبات جرمی استفاده می‌شود. ممکن است فردی را متهم کنند که در ساعت معینی شما در چنین محلی این خلاف را انجام داده‌اید. اگر شما بتوانید ثابت کنید که در همین ساعت در محل دیگری بوده‌اید، آنگاه از این خلاف مبرا هستید. زیرا در این ساعت معین شما نمی‌توانید در هر دو مکان باشید و این یک تناقض است.

اثبات به کمک تناقض را اثبات غیرمستقیم یا اثبات به برهان خلف نیز می‌نامند. برای روشن‌شدن اثبات غیرمستقیم فعالیت زیر را انجام می‌دهیم:

**فعالیت:** یک مربع ۴×۴ مطابق شـــکل ۳ داریم که ۱۶ مربع یـــا خانه دارد. تعدادی از این مربع‌ها را بـــا عددهایی پر کرده‌ایم. مربع‌ها یا خانه‌های خالـــی را با عددهای ۱،۲،۳،۴ چنان پر کنید که در هر سطر و هر ستون هیچ دو عدد تکراری نداشته باشیم.

| | | | |
|---|---|---|---|
| z | x | y | ۳ |
| | ۱ | | |
| ۲ | | ۱ | |
| | ۴ | | |

شکل ۳

یک خانه را $X$ می‌نامیم. فکر می‌کنید $X$ باید چه عددی باشد؟

$X$ نمی‌تواند ۳ باشد، زیرا اگر ۳ باشد، در یک سطر دو عدد مثل هم داریم و یک تناقض رخ می‌دهد. $X$ برابر ۱ و ۴ نیز نمی‌تواند باشد، زیرا در یک ستون دو عدد مساوی داریم و متناقض فرض مسئله است که در هر سطر و هر ستون یک عدد دو بار تکرار نشود. بنابراین $X$ فقط می‌تواند ۲ باشد. به همین روش می‌توانیم تمام خانه‌های جدول را با عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴ پر کنیم. در واقع، این یک اثبات غیرمستقیم و یا اثبات به وسیلهٔ تناقض است. $X = 1, 3, 4$ به یک تناقض با فرض مسئله منجر می‌شود. پس فقط حالت $X = 2$ می‌تواند پاسخ صحیح مسئله باشد. $y$ هم باید ۴ باشد. چرا؟ و بالاخره داریم: $z = 1$. بقیه را به همین ترتیب پر کنید.

در حل این مسئله شما باید بتوانید سه عدد از چهار عدد مفروض را حذف کنید و این حذف در صورت متناقض بودن با فرض مسئله انجام می‌گیرد. در نتیجه عدد چهارم عددی است که در خانهٔ مفروض قرار می‌گیرد. در واقع به طور غیرمستقیم عدد خانهٔ موردنظر را پیدا می‌کنید. این نوع استدلال «استدلال غیرمستقیم» نام دارد. در اثبات غیرمستقیم همهٔ امکان‌های مسئله در نظر گرفته می‌شوند و سپس همهٔ آن‌هایی را که تناقض ایجاد می‌کنند، حذف می‌کنیم. در نتیجه بقیهٔ امکان‌ها می‌توانند درست باشند.

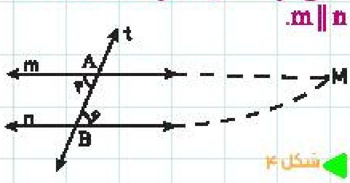
اثبات دارای استدلال غیرمستقیم، «اثبات غیرمستقیم» نام دارد. علاوه بر آنچه در بالا در مورد اثبات غیرمستقیم انجام دادیم، معمولاً اثبات غیرمستقیم به‌صورت زیر به کار برده می‌شود: فرض کنیم $R$ گزاره‌ای باشد که می‌خواهیم درستی آن را ثابت کنیم.

فرض می‌کنیم $R$ نادرست باشد. سپس با به کار بردن یک سلسله استدلال‌ها نشان می‌دهیم، نادرستی نتیجه‌ای که به دست آمده، برای ما کاملاً مشخص است. مثلاً نتیجه $1 = 0$ شده است، و یا به‌طور کلی با اصل‌ها و قضیه‌هایی که درستی آن‌ها را می‌دانیم در تضاد و یا با آن‌ها متناقض است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که نادرست در نظر گرفتن $R$ درست نبوده است. پس خود $R$ باید درست باشد؛ یعنی خود فرض ما درست بوده است.

در واقع از این حقیقت استفاده کرده‌ایم که گزارهٔ $R$ دو حالت بیشتر ندارد: یا درست است یا نادرست است. اگر نادرست در نظر گرفتن $R$ ما را به یک نتیجهٔ نادرست یا یک تناقض برساند، پس خود $R$ درست بوده است. به همین دلیل اثبات غیرمستقیم را اثبات به وسیلهٔ تناقض یا برهان خلف نیز می‌نامند.

اکنون نشان خواهیم داد که چگونه می‌توانیم عکس قضیهٔ زاویه‌های متبادل داخلی را به کمک اثبات غیرمستقیم ثابت کنیم.

**عکس قضیهٔ زاویه‌های متبادل داخلی:** خطی دو خط موازی متمایز را قطع کرده است. اگر دو زاویهٔ متبادل داخلی هم‌نهشت باشند، آنگاه دو خط موازی‌اند. یعنی در شکل ۴ اگر: $\angle 6 \cong \angle 4$، آنگاه $m \parallel n$.




شکل ۴

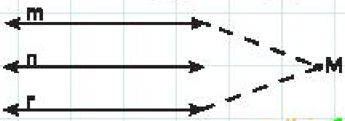
**اثبات:** اثبات غیرمستقیم یا برهان خلف را به کار می‌بریم.

فرض کنیم $m$ موازی $n$ نباشد، یعنی: $m \nparallel n$ و $t$ دو خط $m$ و $n$ را قطع کرده باشد. در نتیجه دو خط $m$ و $n$ یکدیگر را در یک طرف خط $t$ قطع می‌کنند. نقطهٔ تقاطع را $M$ می‌نامیم. اکنون در مثلث $ABM$، زاویهٔ ۴ یک زاویهٔ بیرونی نظیر رأس $A$ است و زاویهٔ ۶ یک زاویهٔ داخلی غیرمجاور آن است. بنا بر قضیهٔ زاویهٔ بیرونی که اندازهٔ هر زاویهٔ بیرونی از اندازهٔ هر زاویهٔ درونی غیرمجاور آن بزرگ‌تر است، نتیجه می‌گیریم که: $\angle 4 > \angle 6$. اما این متناقض با فرض قضیه است که: $\angle 6 \cong \angle 4$. یعنی به یک تناقض می‌رسیم. بنابراین نتیجه می‌گیریم که فرض موازی نبودن $m$ و $n$ نادرست بوده است. در نتیجه باید $m$ موازی $n$ باشد. یعنی ثابت کردیم که: $m \parallel n$.

برای آنکه قدرت اثبات غیرمستقیم را بهتر بشناسیم، قضیهٔ مهم دیگری را در خط‌های دو به دو موازی بیان و ثابت می‌کنیم.

**قضیه:** در یک صفحه، دو خط موازی با یک خط، خودشان موازی‌اند. یعنی اگر: $m \parallel n$ و $r \parallel n$، آن‌گاه: $m \parallel r$.

اثبات آن ساده است. در شکل ۵ اگر $m$ و $r$ موازی نباشند (فرض خلف)، پس یکدیگر را در نقطه‌ای مانند $M$ قطع می‌کنند. در این صورت از نقطهٔ $M$ دو خط به موازات خط $n$ رسم شده است که خلاف اصل توازی است. پس $m$ با $n$ نمی‌تواند متقاطع باشد و در نتیجه موازی‌اند.

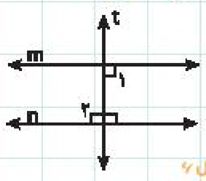



شکل ۵

## موازی‌ها و عمودها

در مورد موازی‌ها چندین قضیه و عکس‌های آن‌ها را مشاهده کردید. همچنین در بخش‌های قبلی دو خط عمود بر هم را تعریف کردیم و نشان دادیم که از یک نقطه روی یک خط، یک و فقط یک خط می‌توانیم بر آن خط عمود رسم کنیم. اکنون در این قسمت ارتباط بین خط‌های موازی و عمود را نشان خواهیم داد و قضیهٔ مهمی را که حالت کلی‌تر رسم عمود بر یک خط است، ثابت می‌کنیم.

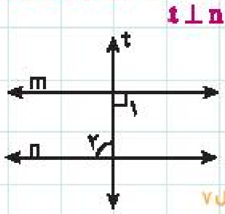
**قضیه:** در یک صفحه، دو خط عمود بر یک خط موازی‌اند. یعنی اگر: $m \perp t$ و $n \perp t$، آن‌گاه: $m \parallel n$.




شکل ۶

در شکل ۶، بنابر عکس قضیهٔ زاویه‌های متبادل داخلی واضح است که: $m \perp t$ و $n \perp t$. در نتیجه: $m\angle 1 = 90^\circ = m\angle 2$. پس $m \parallel n$. از عکس قضیه‌های زاویه‌های متناظر و متقابل نیز می‌توانید استفاده کنید. این قضیه در اثبات موازی بودن خط‌ها کاربرد دارد. قضیهٔ بعدی شرطی را برای عمود بودن دو خط بیان می‌کند:

**قضیه:** در یک صفحه، اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است. یعنی اگر: $m \parallel n$ و $t \perp m$، آن‌گاه: $t \perp n$.




شکل ۷

اثبات به کمک قضیهٔ زاویه‌های متبادل داخلی ساده است: $m \parallel n$، در نتیجه: $m\angle 1 = m\angle 2$. اما $m\angle 1 = 90^\circ$، پس: $m\angle 2 = 90^\circ$. یعنی: $t \perp n$.